

УДК 551.465:532.5

## НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИКА ТУРБУЛЕНТНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СТРУЙ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ. ЧАСТЬ 2. МЕХАНИЗМ ВОЗБУЖДЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУИ\*

© 2012 г. Е. В. Ежова, Ю. И. Троицкая

*Институт прикладной физики РАН  
603950, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46  
E-mail: ezhova@hydro.appl.sci-nnov.ru*

Поступила в редакцию 12.04.2011 г.

На основании лабораторных экспериментов в Большом опытовом термостратифицированном бассейне ИПФ РАН (БОСБ) показано, что турбулентная осесимметричная струя в стратифицированной жидкости с резким перепадом плотности (пикноклином) интенсивно генерирует внутренние волны. Их источником является осесимметричная мода колебаний, для которой выполняется достаточное условие устойчивости в приближении параллельного течения. В настоящей работе изучена устойчивость непараллельного течения с автомоделными профилями скорости, моделирующего струйное течение в нижней части пикноклина, по отношению к осесимметричной моде. Показано, что мода становится неустойчивой. Оценки частоты осесимметричной моды вблизи пикноклина согласуются с данными эксперимента. Экспериментально обнаружены признаки автоколебательного режима струи и подтверждена теоретически возможность автоколебаний: показано, что течение в области пикноклина абсолютно неустойчиво.

**Ключевые слова:** турбулентные струи, осесимметричная мода, непараллельные струи, стратификация, абсолютная неустойчивость.

### ВВЕДЕНИЕ

Гидродинамическая неустойчивость струйных течений от постоянного источника является основной причиной их нестационарных режимов. Установлено, что на струе с круговым сечением преобладают две низшие моды колебаний: осесимметричная (варикозная) и спиральная (изгибная) [1–3]. В [4–7] теоретически показано и подтверждено экспериментально, что вблизи выходного отверстия, где толщина сдвигового слоя струйного течения мала по сравнению с его радиусом, наиболее неустойчивой по сравнению с другими является осесимметричная мода. Напротив, теория гидродинамической неустойчивости плоскопараллельных струйных течений с профилями скорости, моделирующими течение в струе на большом расстоянии от источника, показывает, что неустойчивой является изгибная мода [8]. Этот вывод подтвержден экспериментом, в кото-

ром струя подвергалась внешнему периодическому воздействию. Однако ряд экспериментов [9–12] показывает, что спиральная мода не всегда является доминирующей: наряду со спиральной модой, на больших расстояниях от источника наблюдаются осесимметричные когерентные структуры.

Подобные особенности струйных течений наблюдались в экспериментах по изучению нестационарной динамики турбулентных вынужденных струй в стратифицированной жидкости, описанных в части 1 [13]. Эксперименты проводились в Большом опытовом термостратифицированном бассейне ИПФ РАН (БОСБ) со стратификацией термоклинного типа. Струя с плотностью, равной плотности нижнего слоя стратификации, вытекала из отверстия кругового сечения вертикально вверх с начальным импульсом. При этом в области термоклина формировался фонтан – струя отрицательной плавучести с ненулевым вертикальным импульсом. Для изучения динамики фонтана проводилась подводная видеосъемка. Обработка данных съемки показала, что происходило в основном возбуждение осесимметричной моды фонтана, которая приводила к интенсивной гене-

\* Ежова Е.В., Сергеев Д.А., Кандауров А.А., Троицкая Ю.И. Нестационарная динамика турбулентных осесимметричных струй в стратифицированной жидкости. Часть 1. Экспериментальное исследование // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2012. Т. 48. № 4.

рации внутренних волн. Необходимое условие неустойчивости струи с круговым сечением относительно осесимметричного возмущения представляет собой аналог критерия Рэлея для неустойчивости плоскопараллельных течений:

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{U_0'}{r} \right) = 0,$$

где  $U_0(r)$  – профиль средней продольной скорости в струе. Измерения, описанные в части 1, показали, что для струи, наблюдавшейся в эксперименте, критерий неустойчивости не выполняется, в то же время на ней возбуждается осесимметричная мода.

Реальные струйные течения являются непараллельными, однако этот факт, как правило, не играет важной роли для различных приложений, поскольку радиальная скорость течения оказывается малой по сравнению с продольной [14]. Тем не менее непараллельность течения оказывается фактором, определяющим устойчивость осесимметричной моды. Например, в работе [15] исследована пространственная устойчивость затопленной струи Ландау, радиус которой растет вниз по потоку, и показано, что осесимметричная мода становится неустойчивой. Исследуемая в настоящей работе струя кругового сечения также является непараллельной, таким образом, можно ожидать развития на ней осесимметричной моды. В данной части изучается временная неустойчивость осесимметричной моды непараллельного течения с автомоделными профилями скорости, выполняется оценка частоты этой моды вблизи термоклина и проводится сравнение с частотой внутренних волн, измеренной в эксперименте.

Эксперимент, описанный в части 1, показал, что на спектре колебаний струи всегда присутствует ярко выраженный пик, соответствующий осесимметричной моде, в то время как в экспериментах по изучению неустойчивости турбулентных струй в однородной жидкости на удалении от источника, как правило, доминирует спиральная мода. Эта особенность может быть связана с развитием автоколебательного режима варикозной моды на течении с противотоком, образующимся в кольцеобразной области вокруг основного течения в термоклине. В работах [16, 17] показано, что для плоскопараллельных и слабо непараллельных течений наличие противотока может привести к развитию абсолютной неустойчивости и возникновению автоколебаний. В настоящей работе обсуждается возможность автоколебательного режима осесимметричной моды непараллельной струи в области термоклина.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 1 приводится аппроксимация наблюдаемого в эксперименте [13] среднего струйного течения. В разделе 2 исследуется его устойчивость в приближении, предложенном в работах [15, 18–19]. В разделе 3 обсуждаются условия развития абсолютной неустойчивости на струе.

## 1. АППРОКСИМАЦИЯ ПРОФИЛЯ СРЕДНЕЙ СКОРОСТИ ТЕЧЕНИЯ В СТРУЕ

Для получения профилей средней скорости в струе мгновенные поля продольной и поперечной скорости, рассчитанные по данным эксперимента, осреднялись за время видеосъемки, которое составляло 20 мин [13]. Каждый профиль продольной и поперечной скорости нормировался на максимальное значение продольной скорости  $W_0$  и поперечный масштаб  $R_0$ , который определялся по спаданию максимальной продольной скорости струи в  $\epsilon$  раз. Семейство нормированных профилей показано на рис. 1. Средние профили продольной скорости до входа струи в термоклин имеют характерную колоколообразную форму, а в области термоклина формируется противотечение. Средняя радиальная скорость положительна внутри струи, т.е. наблюдается отток жидкости от оси струи, приводящий к ее расширению, и отрицательна за пределами струи, что соответствует турбулентному вовлечению жидкости в нее.

Зависимости  $R_0$  и  $W_0$  от координаты вдоль струи показаны на рис. 2. Они хорошо аппроксимируются автомоделными зависимостями  $R_0 = \epsilon x$  ( $\epsilon = 0.1$ ),  $W_0 = \beta/x$  ( $\beta = 600 \text{ см}^2/\text{с}$  для эксперимента с выходной скоростью 150 см/с,  $\beta = 554 \text{ см}^2/\text{с}$  для эксперимента с выходной скоростью 110 см/с). Таким образом,

$$U = \frac{\beta}{x} F_1 \left( \frac{r}{\epsilon x} \right), \quad W = \frac{\beta}{x} F_2 \left( \frac{r}{\epsilon x} \right). \quad (1)$$

Введем автомоделную координату  $\xi = \frac{r}{x}$ . Для аппроксимации профиля продольной скорости использовалась экспоненциальная функция вида:

$$F_2(\xi) = \exp(-\xi^2/\epsilon^2). \quad (2)$$

Для того, чтобы определить профиль радиальной скорости, соответствующий такому профилю поперечной скорости, рассмотрим уравнение непрерывности в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{\partial W}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Подставим в (3) автомоделное решение вида (2) и перейдем к автомоделным переменным

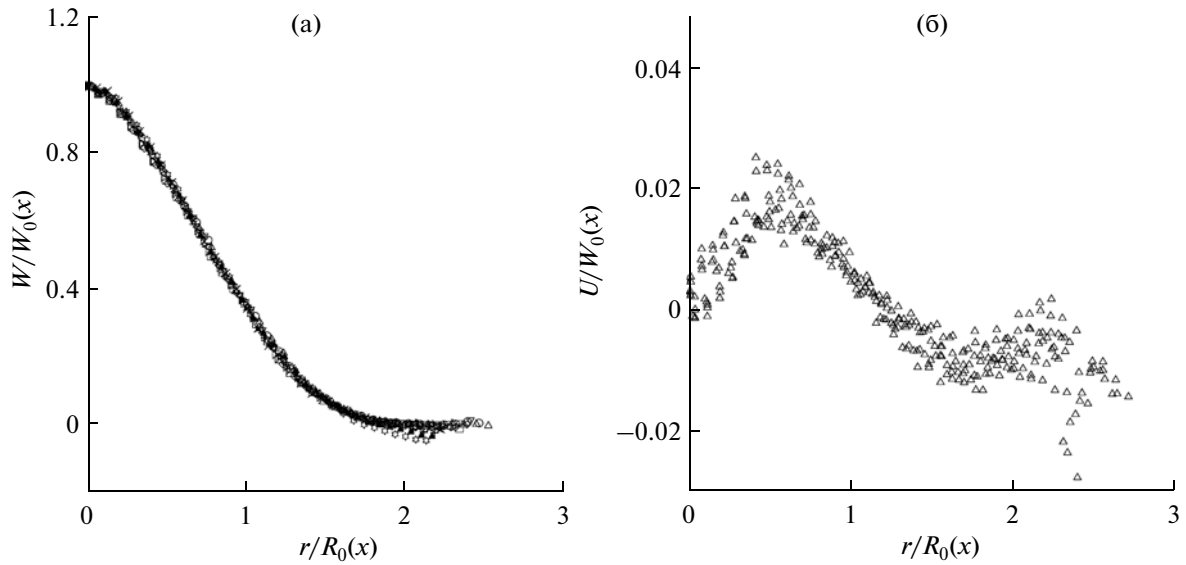


Рис. 1. Нормированные профили средней скорости: слева – продольной, справа – поперечной.

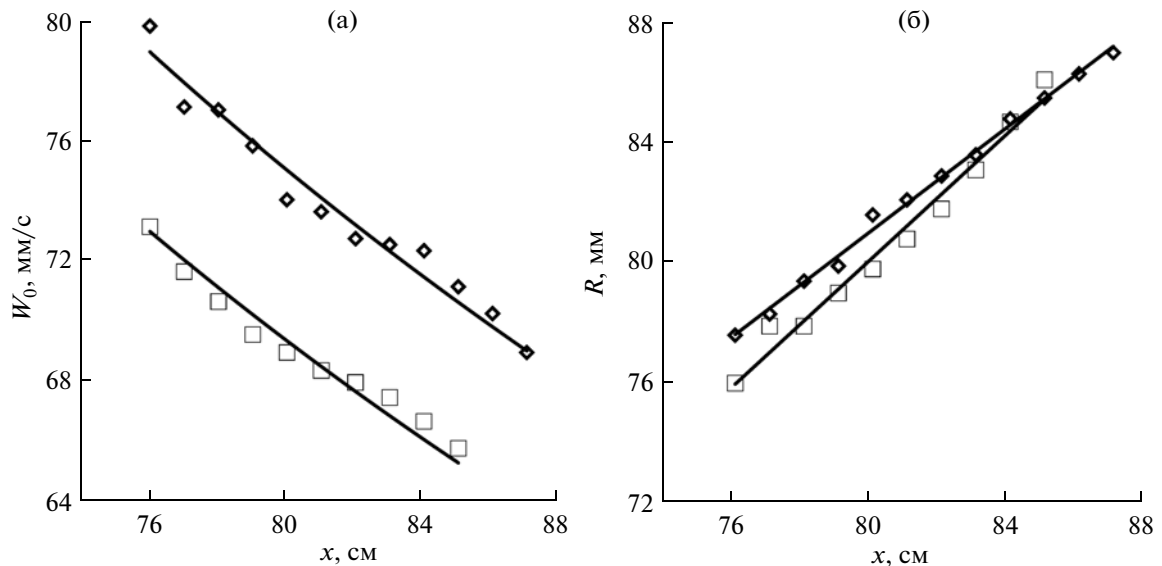


Рис. 2. Зависимости поперечного масштаба (справа) и максимальной продольной скорости (слева) струи от расстояния вдоль нее для экспериментов со скоростями истечения жидкости из отверстия 110 и 150 см/с.

$\left(\xi = \frac{r}{x}, x\right)$ . Тогда уравнение (3) примет следующий вид:

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} (\xi F_1) = \frac{d}{d\xi} (\xi F_2). \quad (4)$$

Подставим функцию, аппроксимирующую продольный профиль скорости (2), в уравнение (4) и с учетом условия  $\xi F_1|_{\xi=0} = 0$ , получим:

$$F_1(\xi) = \frac{\varepsilon}{\xi} \left\{ \varepsilon \left( \frac{1}{2} + \frac{\xi^2}{\varepsilon^2} \right) \exp\left(-\frac{\xi^2}{\varepsilon^2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} \right\}. \quad (5)$$

Результаты аппроксимации экспериментальных продольных средних профилей скорости экспоненциальной функцией показаны на рис. 3. Из рисунка видно, что экспоненциальная функция хорошо аппроксимирует экспериментальные профили скорости турбулентной струи.

## 2. РАСЧЕТ УСТОЙЧИВОСТИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ МОДЫ НЕПАРАЛЛЕЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ

Для исследования устойчивости профиля скорости, задаваемого функцией (2), используем

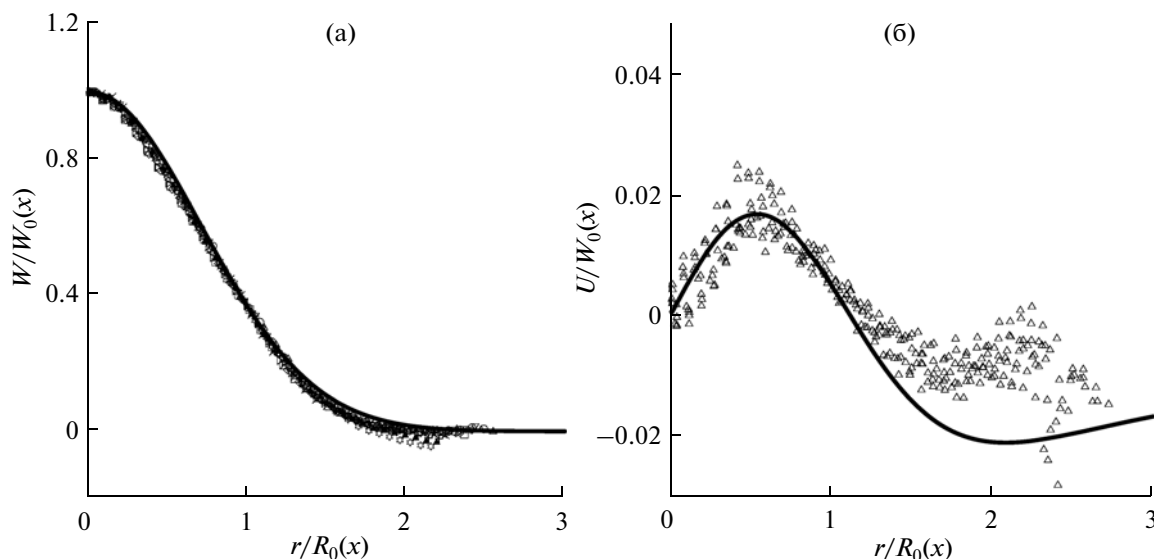


Рис. 3. Аппроксимация компонент скорости. Слева продольная скорость, справа радиальная скорость.

уравнение непрерывности (3) и перейдем к переменным завихренность и функция тока:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = ru, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -rw, \quad \Omega = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (6)$$

Рассмотрим систему уравнений гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \Omega \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Omega \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = \\ = \nu \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) - \frac{\Omega}{r^2} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Omega = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (8)$$

Автомодельное решение в переменных завихренность и функция тока имеет вид:

$$\Psi = xf \left( \frac{r}{x} \right), \quad \Omega = \frac{1}{x^2} \chi \left( \frac{r}{x} \right). \quad (9)$$

Перейдем к автомодельным переменным  $\left( \xi = \frac{r}{x}, x \right)$ , по аналогии с работами [15, 18–19] введем переменную  $\tau = \frac{\nu t}{x^2}$ , и будем искать решение нестационарной системы уравнений (7)–(8) в виде:

$$\begin{aligned} \Psi(\xi, x, t) = xf \left( \xi, x, \tau = \frac{\nu t}{x^2} \right), \\ \Omega(\xi, x, t) = \frac{1}{x^2} \chi \left( \xi, x, \tau = \frac{\nu t}{x^2} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда система уравнений для функций  $f$  и  $\chi$  примет вид:

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial \chi}{\partial \tau} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \left( f + x \frac{\partial f}{\partial x} - 2\tau \frac{\partial f}{\partial \tau} \right) - \\ - \frac{\chi}{\xi^2} \left( f - \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} + x \frac{\partial f}{\partial x} - 2\tau \frac{\partial f}{\partial \tau} \right) - \\ - \frac{1}{\xi} \frac{\partial f}{\partial \xi} \left( -2\chi + x \frac{\partial \chi}{\partial x} - 2\tau \frac{\partial \chi}{\partial \tau} \right) = \\ = \nu \left( 6\chi - 4x \frac{\partial \chi}{\partial x} + 6\xi \frac{\partial \chi}{\partial \xi} - 2x\xi \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial \xi} + \right. \\ \left. + \xi^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} + x^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + 4\tau \frac{\partial \chi}{\partial \tau} + \right. \\ \left. + 4\tau^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} - \frac{\chi}{\xi^2} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \chi = \left( \frac{1}{\xi} + \xi \right) \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{2x}{\xi} \frac{\partial f}{\partial x} - 2x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \xi} + \frac{x^2}{\xi} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{2\tau}{\xi} \frac{\partial f}{\partial \tau} + \\ + 2\tau \frac{\partial^2 f}{\partial \tau \partial \xi} - \frac{2\tau x}{\xi} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \tau} + \frac{4\tau^2}{\xi} \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} - \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial f}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (12)$$

В уравнения (11)–(12) входят члены, пропорциональные  $\tau$  и  $\tau^2$ , что не позволяет проводить исследование устойчивости методом нормальных мод. Применим к системе приближение, используемое в работах [15, 18–19]. Оно состоит в том, что задача рассматривается при  $0 < t < T$ , где  $T$  – конечное время, в течение которого происходит временная эволюция течения в пределах применимости линеаризованных уравнений. Тогда  $0 < \tau < \nu T/x^2$ , и  $\tau \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . В этом приближении можно прене-

бречь в уравнениях (11)–(12) членами, пропорциональными  $\tau$  и  $\tau^2$ . Тогда получаем следующую систему уравнений:

$$v \frac{\partial \chi}{\partial \tau} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \left( f + x \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{\chi}{\xi^2} \left( f - \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} + x \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{1}{\xi} \frac{\partial f}{\partial \xi} \left( -2\chi + x \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) + v \left( \frac{2}{\xi} \frac{\partial f}{\partial \tau} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \tau \partial \xi} - \frac{2x}{\xi} \frac{\partial^2 f}{\partial \tau \partial x} \right) = \quad (13)$$

$$= v \left( 6\chi - 4x \frac{\partial \chi}{\partial x} + 6\xi \frac{\partial \chi}{\partial \xi} - 2x\xi \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial \xi} + \xi^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} + x^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} - \frac{\chi}{\xi^2} \right),$$

$$\chi = \left( \frac{1}{\xi} + \xi \right) \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{2x}{\xi} \frac{\partial f}{\partial x} - 2x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \xi} + \frac{x^2}{\xi} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial f}{\partial \xi}. \quad (14)$$

Сделаем замену переменных  $z = \ln(x/x_0)$ . Будем искать решение системы (13)–(14) в виде  $\chi = \chi_0(\xi) + \varepsilon \tilde{\chi}(\xi, z, \tau)$ ,  $f = f_0(\xi) + \varepsilon \tilde{f}(\xi, z, \tau)$ . В линейном приближении по  $\varepsilon$  система (13)–(14) примет вид:

$$v \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \tau} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \chi_0}{\partial \xi} \left( \tilde{f} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} \right) + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \xi} f_0 - \frac{\chi_0}{\xi^2} \left( \tilde{f} - \xi \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} \right) - \frac{\tilde{\chi}}{\xi^2} \left( f_0 - \xi \frac{\partial f_0}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{\xi} \frac{\partial f_0}{\partial \xi} \left( -2\tilde{\chi} + \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial z} \right) + \frac{2\chi_0}{\xi} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi} + \quad (15)$$

$$+ v \left( \frac{2}{\xi} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tau} + 2 \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \tau \partial \xi} - \frac{2}{\xi} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \tau \partial z} \right) = \quad (15)$$

$$= v \left( 6\tilde{\chi} - 4 \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial z} + 6\xi \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \xi} - 2\xi \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial z \partial \xi} + \xi^2 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial z^2} - \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \xi} - \frac{\tilde{\chi}}{\xi^2} \right),$$

$$\tilde{\chi} = \left( \frac{1}{\xi} + \xi \right) \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} - 2 \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial z \partial \xi} + \frac{1}{\xi} \left( \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial z^2} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} \right) - \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi}. \quad (16)$$

Решение системы уравнений (15)–(16) будем искать в форме:

$$\tilde{f}(\xi, z, \tau) = f_1(\xi) e^{\alpha z - i\omega \tau}, \quad \tilde{\chi}(\xi, z, \tau) = \chi_1(\xi) e^{\alpha z - i\omega \tau}. \quad (17)$$

Получим:

$$\left( \xi + \frac{1}{\xi} \right) \frac{d^2 f_1}{d\xi^2} - \left( 2\alpha + \frac{1}{\xi} \right) \frac{df_1}{d\xi} + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\xi} f_1 = \chi_1, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & (1 + \xi^2) \frac{d^2 \chi_1}{d\xi^2} + \left( 6\xi - 2\xi\alpha + \frac{1}{\xi} \right) \frac{d\chi_1}{d\xi} + \left( 6 - 5\alpha + \alpha^2 - \frac{1}{\xi^2} \right) \chi_1 + i\omega \chi_1 - \\ & - \frac{\text{Re } f_0}{\varepsilon} \frac{d\chi_1}{d\xi} + \frac{\text{Re } 1}{\varepsilon} \frac{1}{\xi^2} \left( f_0 - \xi \frac{df_0}{d\xi} \right) \chi_1 + \\ & + \frac{\text{Re } 1}{\varepsilon} \frac{df_0}{d\xi} (\alpha - 2) \chi_1 = \frac{\text{Re}}{\varepsilon} \left( \frac{1}{\xi} (1 + \alpha) \frac{d\chi_0}{d\xi} f_1 - \frac{\chi_0}{\xi^2} \times \right. \\ & \times \left. \left( (1 + \alpha) f_1 - \xi \frac{df_1}{d\xi} \right) + \frac{2}{\xi} \chi_0 \frac{df_1}{d\xi} \right) + \\ & + \frac{2i\omega}{\xi} (\alpha - 1) f_1 - 2i\omega \frac{df_1}{d\xi}. \end{aligned} \quad (19)$$

Граничные условия для осесимметричной моды следуют из:

равенства нулю радиальной скорости на оси струи:

$$u|_{r=0} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{\xi} \left( f_1 (1 + \alpha) - \xi \frac{df_1}{d\xi} \right) \Big|_{\xi=0} = 0, \quad (20)$$

равенства нулю касательных напряжений на оси струи:

$$\sigma_{rz}|_{r=0} = \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Big|_{r=0} = \left( 2 \frac{\partial w}{\partial r} + \Omega \right) \Big|_{r=0} = 0 \quad (21)$$

или  $\chi_1|_{\xi=0} = 0$ ,

и условия убывания возмущений среднего течения на бесконечности:

$$f_1, \chi_1|_{\xi \rightarrow \infty} = 0. \quad (22)$$

Система (18)–(19) в совокупности с граничными условиями (20)–(22) при фиксированном  $\alpha$  представляет собой задачу на собственные функции  $f_1, \chi_1$  и собственные значения  $\omega$ . Для численного решения задачи удобно ввести новые переменные:

$$t = \xi^2, \quad \theta = \chi_1 \xi, \quad \phi = f_1,$$

и обозначения:

$$\Phi_0 = f_0, \quad \Phi_0 = \frac{1}{\xi} \frac{df_0}{d\xi}, \quad \Theta_0 = \frac{\chi_0}{\xi}, \quad \Theta_0 = \frac{d\chi_0}{d\xi}. \quad (23)$$

Тогда система (18)–(19) перейдет в

$$4(1+t) \frac{d^2 \phi}{dt^2} + (2-4\alpha) \frac{d\phi}{dt} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{t} \phi = \frac{\theta}{t}, \quad (24)$$

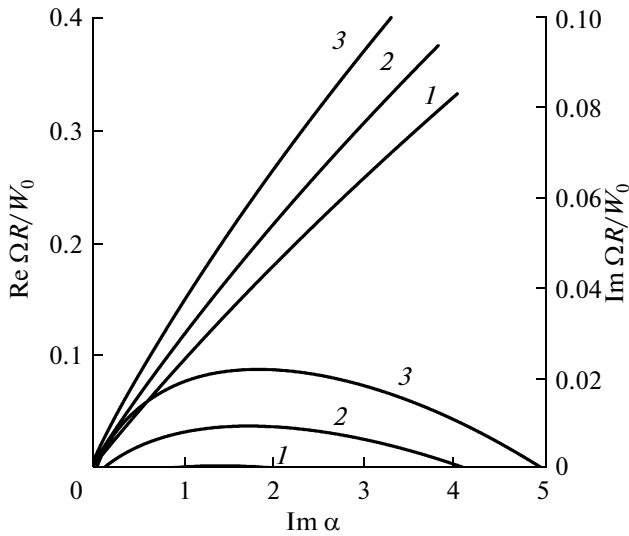


Рис. 4. Аналоги дисперсионных кривых при Re = 50: ε = 0.08 (1), ε = 0.1 (2), ε = 0.12 (3).

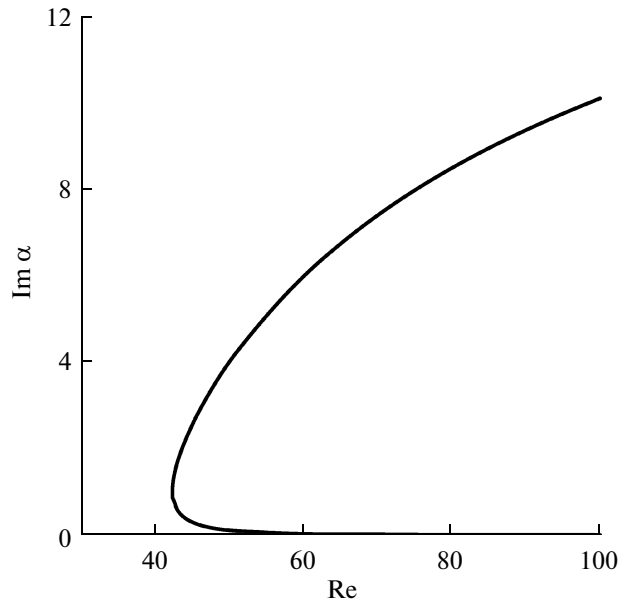


Рис. 5. Граница области устойчивости в плоскости параметров (Re, Im α) при ε = 0.1.

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{(5-2\alpha)d\theta}{2(1+t)dt} + \frac{(\alpha-2)(\alpha-1)}{4t(1+t)}\theta + \frac{i\omega}{4t(1+t)}\theta - \\ & - \frac{\text{Re}}{\varepsilon} \frac{\phi_0}{2t(1+t)} \left( \frac{d\theta}{dt} - \frac{\theta}{t} \right) + \frac{\text{Re}(\alpha-3)\Phi_0}{\varepsilon} \frac{\theta}{4t(1+t)} = \\ & = \frac{\text{Re}}{\varepsilon} \left( \frac{(\alpha+1)(\Theta_0 - \theta_0)}{4t(1+t)} \phi + \frac{3\theta_0}{2(1+t)} \frac{d\phi}{dt} \right) + \\ & + \frac{i\omega}{2t(1+t)}(\alpha-1)\phi - \frac{i\omega}{(1+t)} \frac{d\phi}{dt}, \end{aligned} \quad (25)$$

а граничные условия (20)–(22)

$$\theta|_{t=0} = 0, \quad \phi|_{t=0} = 0, \quad (26)$$

$$\theta|_{t \rightarrow \infty} = 0, \quad \phi|_{t \rightarrow \infty} = 0, \quad (27)$$

при этом  $\theta'(0) \neq 0, \phi'(0) \neq 0$ .

Алгоритм решения задачи следующий. Сначала решалась граничная задача (26)–(27) для определения  $\theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2$ , удовлетворяющих условиям в нуле:  $\phi_1'(0) = 1, \theta_1'(0) = \lambda_1$  и  $\phi_2'(0) = 1, \theta_2'(0) = \lambda_2$ . При этом использовался неявный сеточный метод, основанный на методе исключения Гаусса для решения системы линейных уравнений, получаемых при разностной аппроксимации системы (24)–(25) [20]. Искомое решение представляет собой линейные комбинации:

$$\theta = A\theta_1 + B\theta_2, \quad (28)$$

$$\phi = A\phi_1 + B\phi_2.$$

Используя условия (28), получим для нахождения собственного числа  $\omega$  следующее уравнение:

$$\theta_1(0)\phi_2(0) - \theta_2(0)\phi_1(0) = 0. \quad (29)$$

Оценочное число Рейнольдса, определяемое с использованием молекулярной вязкости, для па-

раметров эксперимента равно 6000. Однако оно может уменьшиться на несколько порядков за счет турбулентной вязкости. Результаты расчета устойчивости осесимметричной моды при значении числа Рейнольдса, равном 50, представлены на рис. 4. Видно, что при малых значениях параметра расходимости осесимметричная мода становится устойчивой, а с его ростом инкремент моды также возрастает. На рис. 5 показаны граница области устойчивости в плоскости параметров (Re, Im α) при ε = 0.1.

Для того, чтобы понять, с чем может быть связано развитие неустойчивой осесимметричной моды на непараллельном течении, рассмотрим закон сохранения кинетической энергии жидкой частицы  $e = \frac{u_r^2 + u_x^2}{2}$  в цилиндрических координатах в виде, предложенном в [2]:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + U_r \frac{\partial e}{\partial r} + U_x \frac{\partial e}{\partial x} = \nu \Delta e + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \quad (30)$$

где

$$\mu_1 = -u_x u_r \left( \frac{\partial U_r}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial r} \right) - u_r^2 \frac{\partial U_r}{\partial r} - u_x^2 \frac{\partial U_x}{\partial x}, \quad (31)$$

$$\mu_2 = -u_r \frac{\partial p}{\partial r} - u_x \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (32)$$

$$\mu_3 = -\nu \left\{ \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_r}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_x}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \right\}. \quad (33)$$

Из (30) следует, что изменение энергии жидкой частицы во времени происходит за счет:

- 1) диффузии, описываемой первым слагаемым в правой части,
- 2) переноса энергии от среднего течения к возмущениям (31),
- 3) потери кинетической энергии на перенос жидкой частицы из области с меньшим давлением в область с большим (или приращения энергии, если на оборот) (32),
- 4) вязких потерь (33).

Обратим внимание на последнее слагаемое в (31), которое отсутствует, если течение плоскопараллельное. При  $\frac{\partial U_x}{\partial x} < 0$  оно будет приводить к росту кинетической энергии жидкой частицы. Таким образом, вследствие непараллельности течения (в частности, эффекта замедления струи) появляется дополнительная радиационная сила, совершающая работу по передаче энергии от среднего течения к возмущениям.

### 3. ОЦЕНКИ ЧАСТОТЫ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ МОДЫ ДЛЯ ДАННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТА. О ВОЗМОЖНОСТИ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОГО РЕЖИМА ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ МОДЫ

Сделаем оценку частоты варикозной моды для данных эксперимента. Отметим, что собственное число  $\omega$  связано с физической частотой  $\Omega$  соотношением  $\Omega = \frac{\omega v}{x^2}$ . Это означает, что частота моды зависит от расстояния вдоль струи. Сделаем оценку частоты на входе в термоклин для параметров эксперимента. Нормируем физическую частоту на  $\frac{W_0}{R_0}$ , тогда  $\frac{\Omega}{W_0/R_0} = \omega \frac{\varepsilon^2}{Re}$ . Дисперсионные кривые для  $Re = 50$  показаны на рис. 4. Видно, что наиболее неустойчивой будет мода с безразмерной частотой 0.22. Вблизи термоклина по данным эксперимента  $\frac{W_0}{R_0} \approx 0.8-1.1 \text{ с}^{-1}$ . Тогда частота наиболее неустойчивой моды лежит в диапазоне 0.028–0.039 Гц, т.е. близка к частоте пика внутренних волн (0.032–0.04 Гц).

С другой стороны, в части 1 настоящей работы было показано, что и верхняя граница струи также совершает осцилляции с частотой, близкой к частоте внутренних волн. Колебания струи в нижней части термоклина и над термоклином происходят на одной частоте. Это дает возможность предположить, что на струе может нарастать неустойчивая глобальная мода, локализованная в области термоклина, приводящая к автоколебательному режиму. Подводная видеосъемка позволяет исследовать спектры колебаний осесимметричной моды в различных поперечных сечениях вдоль струи (рис. 6). Из рисунка видно,

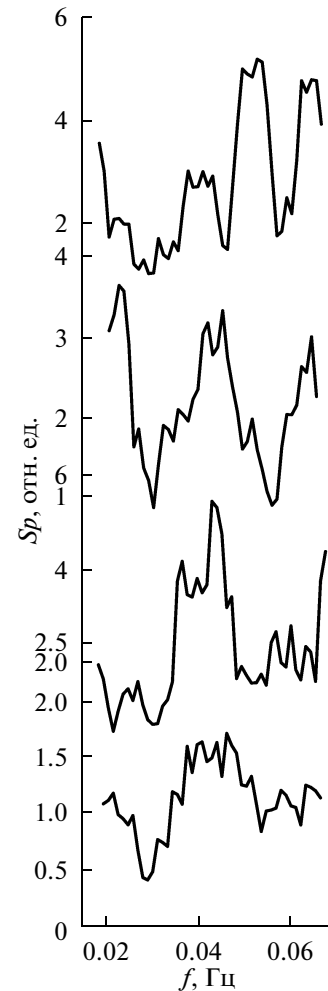
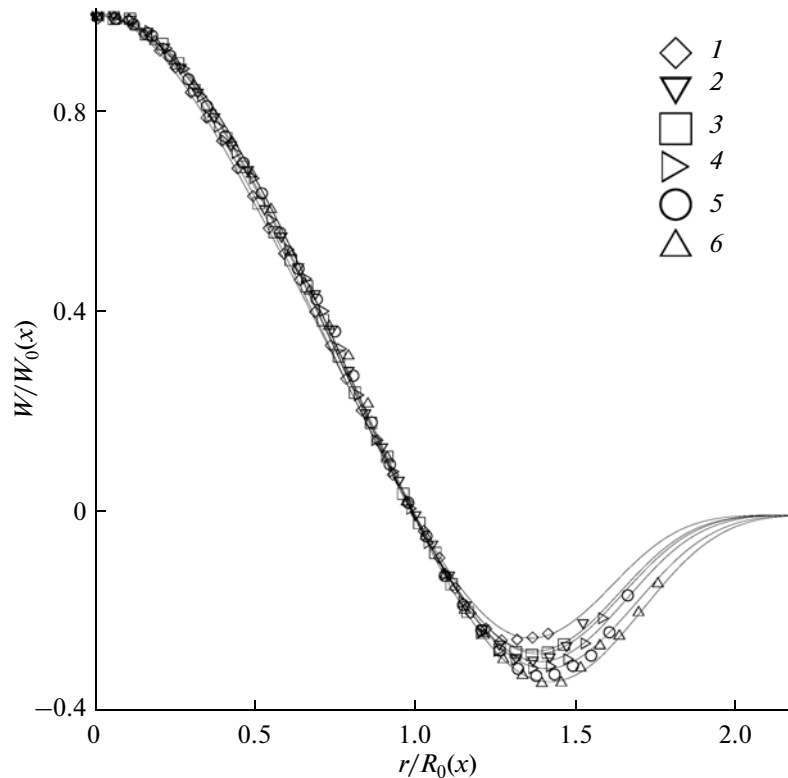


Рис. 6. Спектры колебаний толщины для 4-х поперечных сечений струи в области термоклина.

что возмущение на частоте, близкой к 0.04 Гц, присутствует на всех спектрах. Это свидетельствует в пользу предположения о возбуждении в системе глобальной моды [17].

В [17] показано, что необходимым условием нарастания на струйном течении неустойчивой глобальной моды является его абсолютная неустойчивость в некоторой конечной области вдоль направления распространения струи. Причиной развития абсолютной неустойчивости плоскопараллельного и слабонепараллельного струйного течения может стать противоток на профилях средней скорости [17, 21]. Противоток хорошо заметен на профилях скорости струи в области термоклина (рис. 7).

Исследуем качественно устойчивость расходящегося течения, имеющего профили продольной скорости, совпадающие с измеренными экспериментально (см. рис. 7), в котором параметр расходимости равен 0.35 и числом Рейнольдса 300.



**Рис. 7.** Аппроксимация профилей продольной скорости струи в верхней части термоклина. Наименьшее противотечение (1) соответствует профилю скорости в поперечном сечении струи, расположенном на 1/4 толщины термоклина вверх от его центра. Усиление противотечения соответствует последовательным профилям (2)–(6), отстоящим друг от друга на 1 см, вдоль направления распространения струи.

Профили скорости хорошо аппроксимируются функцией вида:

$$W/W_0 = a_1 e^{-a_2 \xi^2 / \varepsilon^2} + (a_3 e^{-a_4 \xi^2 / \varepsilon^2} - a_5) e^{-a_6 \xi^6 / \varepsilon^6},$$

где  $a_i$ ,  $i = \overline{1,6}$  – константы (для профилей скорости на рис. 7 см. табл. 1).

Используем критерий Бриггса [22, 23], согласно которому неустойчивость будет абсолютной, если мнимая часть абсолютной частоты положительна, и конвективной, если она отрицательна. Абсолютная частота определяется из условия ра-

венства комплексной групповой скорости возмущения нулю:  $\frac{\partial \omega}{\partial k} = 0$  и соответствует седловой точке в комплексной плоскости волновых чисел; для нашей задачи это условие примет вид  $\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = 0$ .

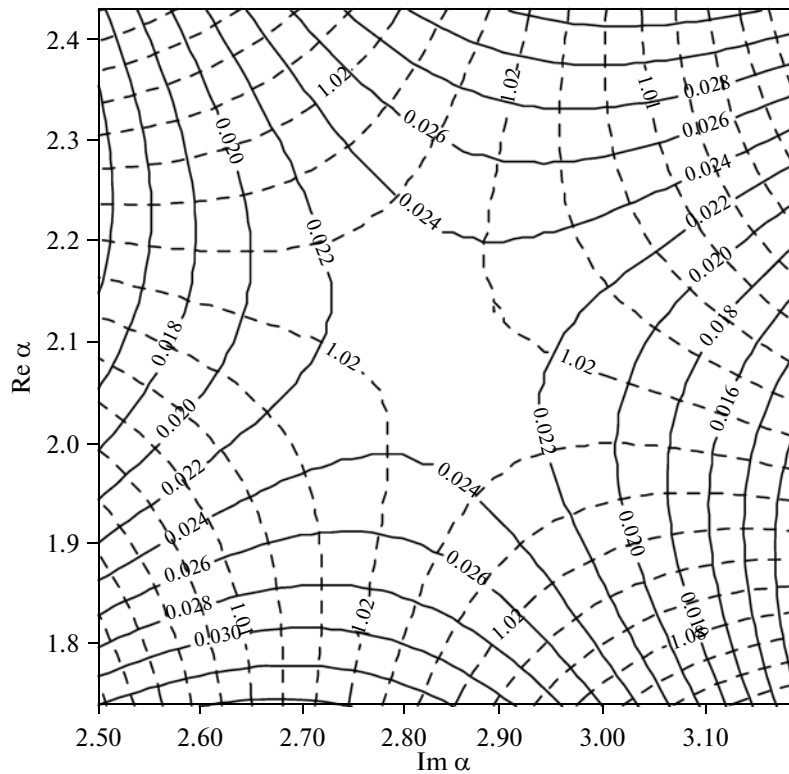
На рис. 8 приведены для профиля 3 продольной скорости на рис. 9 линии уровня действительной и мнимой части частоты на комплексной плоскости ( $\text{Re } \alpha$ ,  $\text{Im } \alpha$ ) в области вблизи седловой точки.

Зависимость мнимой части абсолютной частоты для профилей продольной скорости, изображенных на рис. 7, показана на рис. 9. Минималь-

**Таблица 1**

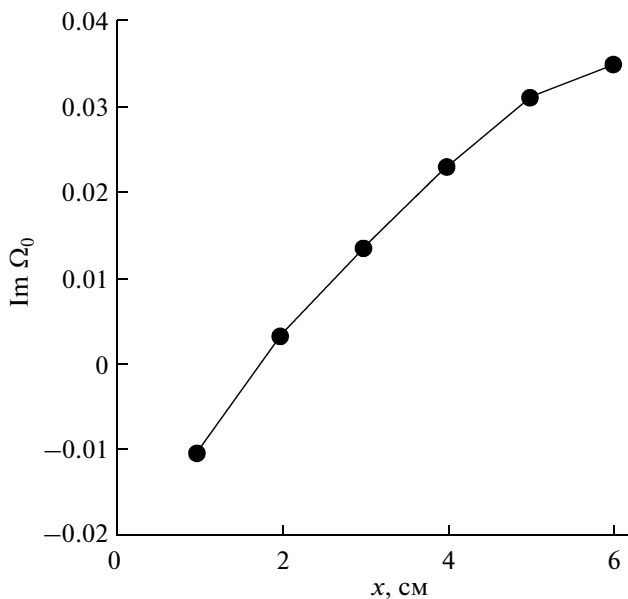
№ профиля	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
1	0.13	2.16	2.0	0.58	1.13	0.062
2	0.31	1.45	2.0	0.49	1.31	0.058
3	0.20	1.38	2.0	0.56	1.19	0.049
4	0.20	1.24	2.0	0.56	1.20	0.044
5	0.20	1.00	2.0	0.59	1.20	0.041
6	0.20	1.00	2.00	0.58	1.21	0.037





**Рис. 8.** Линии уровня реальной (штриховая линия) и мнимой (сплошная линия) части частоты на плоскости  $(\text{Re } \alpha, \text{Im } \alpha)$ .

ное значение инкремента соответствует профилю скорости 1 с наименьшим противотоком. Из рис. 9 видно, что мнимая часть абсолютной ча-



**Рис. 9.** Зависимость мнимой части абсолютной частоты от расстояния для профилей продольной скорости, показанных на рис. 7.

стоты становится положительной при усилении противотока на профилях продольной скорости струи. Значит, в верхней части термоклина струйное течение абсолютно неустойчиво. Как показано в [17], конечный участок абсолютной неустойчивости вдоль направления распространения струи является необходимым условием существования неустойчивой глобальной моды. Это условие выполняется для течения в верхней части термоклина (см. рис. 9), таким образом, в этой области на струе может нарастать неустойчивая осесимметричная глобальная мода, что подтверждает выводы об ее возбуждении, сделанные на основе эксперимента.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе лабораторного моделирования в Большом термостратифицированном бассейне ИПФ РАН исследована нестационарная динамика осесимметричных турбулентных струй, приводящая к генерации внутренних волн. При проведении эксперимента выполнена подводная видеосъемка струи в области термоклина, на основании которой с помощью техники PIV измерены мгновенные поля скорости в продольном сечении струи, были исследованы колебания гра-

ниц струи. Одновременные измерения температуры на нескольких горизонтах показали существование интенсивных осцилляций. Сравнение спектров внутренних волн со спектрами колебаний струи в области термоклина подтвердило, что струя является источником внутренних волн. На основе данных измерений полей скорости выполнен модовый анализ возмущений на струе, который показал, что возбуждается преимущественно осесимметричная мода. Анализ гидродинамической устойчивости струйного течения постоянного сечения с профилями скорости, моделирующими течение вблизи термоклина, показал, что осесимметричная мода устойчива. Была исследована устойчивость осесимметричной моды расходящегося струйного течения с автомодельными профилями скорости, и было показано, что непараллельность течения приводит к неустойчивости осесимметричной моды. Оценки частот колебаний осесимметричной моды для параметров, соответствующих условиям эксперимента, согласуются с частотой пика в спектрах внутренних волн. На основании анализа данных эксперимента показано, что в различных поперечных сечениях струи в области термоклина развивается осесимметричная мода на одной частоте (на частоте генерации), что является признаком возбуждения глобально неустойчивой моды. Дано теоретическое обоснование этого явления, в частности, показано, что противоток на профилях продольной скорости струи в верхней части термоклина является причиной абсолютной неустойчивости течения, необходимой для развития глобальной моды и перехода системы к автоколебаниям.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (ГК № 16.518.11.7105), гранта Правительства Российской Федерации (договор № 11.G34.31.0048), РФФИ (проекты №№ 09-05-00779-а, 11-05-00455-а, ГФЕН\_а 10-05-91177, 12-05-00822-а), ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Batchelor G.K., Gill A.E.* Analysis of the stability of axisymmetric jets // *J. Fluid Mech.* 1962. V. 14. P. 529–551.
2. *Betchov R., Criminale Jr. W.O.* Stability of parallel flows. New York–London: Academic Press Inc., 1967. 330 p.
3. *Michalke A.* Survey on jet instability theory // *Progr. Aerosp. Sci.* 1984. V. 22. № 3. P. 159–199.
4. *Crow S.C., Champagne F.H.* Orderly structure in jet turbulence // *J. Fluid Mech.* 1971. V. 48. P. 547–591.
5. *Lessen M., Singh P.J.* The stability of axisymmetric free shear flows // *J. Fluid Mech.* 1973. V. 60. P. 433–457.
6. *Mattingly G.E., Chang C.C.* Unstable waves on an axisymmetric jet column // *J. Fluid Mech.* 1974. V. 65. P. 541–560.
7. *Plaschko P.* Helical instabilities of slowly divergent jets // *J. Fluid Mech.* 1978. V. 92. P. 209–215.
8. *Michalke A., Hermann G.* On the inviscid instability of a circular jet with external flow // *J. Fluid Mech.* 1982. V. 114. P. 343–359.
9. *Yoda M., Hesselink L., Mungal M.D.* The evolution and nature of large-scale structures in the turbulent jet // *Phys Fluids A.* 1992. V. 4. № 4. P. 803–811.
10. *Agrawal A., Prasad A.K.* Organisational modes of large-scale vortices in an axisymmetric turbulent jet // *Flow, Turbulence and Combustion.* 2002. V. 68. P. 359–377.
11. *Dimotakis P.E., Miake-Lye R.C., Papantoniou D.A.* Structure and dynamics of round turbulent jets // *Phys. Fluids.* 1983. V. 26. № 11. P. 3185–3192.
12. *Gamard S., Jung D., George W.K.* Downstream evolution of the most energetic modes in a turbulent axisymmetric jet at high Reynolds number. Pt 2. The far-field region // *J. Fluid Mech.* 2004. V. 514. P. 205–230.
13. *Ежова Е.В., Сергеев Д.А., Кандауров А.А. и др.* Не-стационарная динамика турбулентных осесимметричных струй в стратифицированной жидкости. Часть 1. Экспериментальное исследование // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 2012. Т. 48. № 4.
14. Теория турбулентных струй / Под ред. Г.Н. Абрамовича. М.: Наука, 1984. 716 с.
15. *Shtern V., Hussain F.* Effect of deceleration on jet instability // *J. Fluid Mech.* 2003. V. 480. P. 283–309.
16. *Monkewitz P.A.* The absolute and convective nature of instability in two-dimensional wakes at low Reynolds numbers // *Phys. Fluids.* 1988. V. 31. P. 999–1006.
17. *Huerre P., Monkewitz P.A.* Local and global instabilities in spatially developing flows // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1990. V. 22. P. 473–537.
18. *Tam K.K.* Linear stability of the non-parallel Bickley jet // *Can. Appl. Math. Quart.* 1996. V. 3. P. 99–110.
19. *McAlpine A., Drazin P.G.* On the spatio-temporal development of small perturbations of Jeffery–Hamel flows // *Fluid Dyn. Research.* 1998. V. 22. P. 123–138.
20. *Troitskaya Yu.I.* Viscous-diffusion nonlinear critical layer in a stratified shear flow // *J. Fluid Mech.* 1991. V. 233. P. 25–48.
21. *Monkewitz P.A., Huerre P., Chomaz J.-M.* Global linear stability analysis of weakly non-parallel shear flows // *J. Fluid Mech.* 1993. V. 251. P. 1–20.
22. *Briggs R.J.* Electron-Stream Interaction With Plasmas. Cambridge, Mass: MIT Press, 1964.
23. Основы физики плазмы. Т. 2. / Под ред. А.А. Галева, Р. Судана. М.: Энергоатомиздат, 1984. 632 с.

# Nonstationary Dynamics of Turbulent Axisymmetric Jets in a Stratified Fluid: Part 2. Mechanism of Excitation of Axisymmetric Oscillations in a Submerged Jet

E. V. Ezhova and Yu. I. Troitskaya

*Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences, ul. Ul'yanova 46, Nizhni Novgorod, 603950, Russia*

*e-mail: ezhova@hydro.appl.sci-nnov.ru*

Received April 12, 2011

**Abstract**—It was shown based on laboratory experiments in a Large Test Thermostratified Basin (LTTB) at the Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences that a turbulent axisymmetric jet in a stratified fluid with a sharp density drop (a pinoctline) intensively generates internal waves. An axisymmetric oscillation mode, for which a sufficient condition of stability in the parallel flow approximation is met, served as their source. This paper studies the stability of a nonparallel flow with self-similar velocity profiles which simulates a jet flow in the lower part of the pinoctline with respect to the axisymmetric mode. The estimates of the axisymmetric mode near the pinoctline are in agreement with the experimental data. The signs of the self-oscillating mode of the jet were experimentally revealed and the possibility of self-oscillation generation was theoretically proved: it was shown that the flow in the pinoctline vicinity is absolutely unstable.

**Keywords:** turbulent jets, axisymmetric mode, nonparallel jets, stratification, absolute instability.